Bilag 4

Kompleks Exponential Serier:

Vi definerer en funktion $x(k) = a^k$, en såkaldt geometrisk fremskrivning.
Summen over x(k) er givet ved

$$S_{N,M}(x(k)) = \sum_{k=N}^{M} x(k) = \sum_{k=N}^{M} a^k$$

Og ved at tilføje endnu en a komponent fås

$$a \cdot S_{N,M}(x(k)) = \sum_{k=N}^{M} a \cdot x(k) = \sum_{k=N}^{M} a^{k+1} = \sum_{k=N+1}^{M+1} a^k$$

Trækker man de 2 ovenstående ligninger fra hinanden fås:

$$S_{N,M}(x(k)) - a \cdot S_{N,M}(x(k))$$

$$= (1-a) \cdot S_{N,M}(x(k)) = \sum_{k=N}^{M} a^k - \sum_{k=N+1}^{M+1} a^k = a^N - a^{M+1}$$

Isoleres $S_{N,M}(x(k))$ fås:

$$S_{N,M}(x(k)) = \frac{a^N - a^{M+1}}{(1-a)}$$

Ser man på special tilfældet hvor N = 0 og M = N-1, som ved DFT, fås:

$$S_{N,M}(x(k)) = \frac{a^0 - a^{(N-1)+1}}{(1-a)} = \frac{1-a^N}{(1-a)}$$

Defineres a til $e^{\frac{j2\pi \cdot x}{N}}$, og indsættes i $S_{N,M}(x(k))$ fås:

$$S_{N,M}(x(k)) = \frac{1-e^{\frac{j2\pi \cdot x \cdot N}{N}}}{(1-e^{\frac{j2\pi \cdot x}{N}})} = \frac{e^{j\pi \cdot x}(e^{j\pi \cdot x} - e^{-j\pi \cdot x})}{e^{\frac{j\pi \cdot x}{N}}(e^{\frac{j\pi \cdot x}{N}} - e^{\frac{-j\pi \cdot x}{N}})} = e^{\frac{j\pi \cdot x \cdot (N-1)}{N}} \cdot \frac{(\sin(\pi \cdot x))}{(\sin(\frac{\pi \cdot x}{N}))}$$

Ser vi udelukkende på modulus delen:

$$\frac{\sin(\pi \cdot x)}{\sin(\frac{\pi \cdot x}{N})}$$

Giver den 0 når x <u>ikke</u> er et helt multiplum af N. Dvs. når $\sin(\frac{\pi \cdot x}{N})$ ikke giver 0.

Men når x er et helt multiplum af N eller 0, fås

$$\frac{\sin(\pi \cdot 0)}{\sin(\frac{\pi}{N} \cdot 0)}$$

som er et $\frac{"0"}{"0"}$ udtryk og kan løses med L'Hopital's regel [1].

Reglen siger at hvis grænsen for f'(x) findes så er det også grænsen for f(x).
Differentieres $\sin(x \cdot \pi)$ fås:

$\pi \cdot \cos(x \cdot \pi)$, som har en grænseværdi for x = 0, nemlig π .

Differentieres $\sin(x \cdot \frac{\pi}{N})$ fås:

$\frac{\pi}{N} \cdot \cos(x \cdot \frac{\pi}{N})$, som har en grænseværdi for x = 0, nemlig $\frac{\pi}{N}$.

Og værdien for $\dfrac{\sin(\pi \cdot x)}{\sin(\frac{\pi \cdot x}{N})}$ antager værdien $\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{N}} = N$.

For at opsummere så giver

$$\sum_{k=N}^{M} a^k = \sum_{k=N}^{M} \left(e^{\frac{j2\pi \cdot x}{N}} \right)^k = e^{\frac{j\pi \cdot 0 \cdot (N-1)}{N}} \cdot N = N$$

Fra DFT er følgende sum givet:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi \cdot (k-m) \cdot n}{N}}$$

Erstattes x i:

$$\sum_{k=N}^{M} \left(e^{\frac{j2\pi \cdot x}{N}} \right)^k$$

med (k-m), får man resultatet N når k = m, og 0 når k <> m. Så vi ender med:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi \cdot (k-m) \cdot n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} N \cdot \delta(n-k).$$

$$\mathrm{x}[\mathrm{k}] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot \sum_{n=0}^{N-1} N \cdot \delta(n-k)$$

Når n <> k:

$$\mathrm{x}[\mathrm{k}] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot \sum_{n=0}^{N-1} N \cdot 0$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot 0 = 0$$

Når n = k:

$$\mathrm{x}[\mathrm{k}] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot \sum_{n=0}^{N-1} N \cdot \delta(n-k)$$

$$= \frac{1}{N} x[k] \cdot N = x[k]$$

Dermed ses det at iDFT er den inverse af DFT.

Referencer

[1] ISBN 87-122-0386-1, *Ebbe Thue Poulsen*, Introduktion til matematisk analyse.